

# LABORATORIUM ELEKTROAKUSTYKI

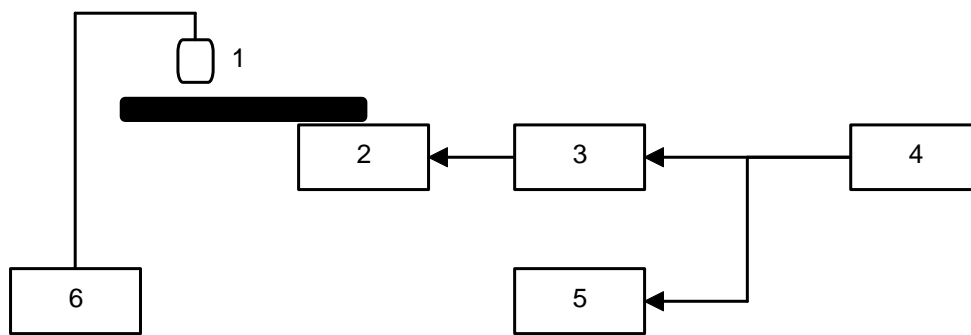
## ĆWICZENIE NR 1 Drgania układów mechanicznych

### Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z właściwościami układów drgających oraz metodami pomiaru i analizy drgań. Ćwiczenie składa się z dwóch części. Pierwsza część ćwiczenia dotyczy drgań układów ciągłych, druga obejmuje pomiary drgań układu o 1 stopniu swobody.

### I. Drgania układów ciągłych

#### 1. Układ pomiarowy



1 - badany układ drgający, 2 - wzbudnica drgań, 3 - wzmacniacz mocy, 4 - generator, 5 - częstotlicznik, 6 - stroboskop.

#### 2. Zadania laboratoryjne

- 2.1. Zmierzyć częstotliwości poprzecznych drgań własnych (modów) belek o różnych długościach i przekrojach poprzecznych, wykonanych z różnych materiałów.
- 2.2. Wyznaczyć trzy pierwsze sposoby (mody) drgań poprzecznych belek.
- 2.3. Otrzymane wyniki zamieścić w tabeli wg wzoru (tabela 3) i porównać z wynikami teoretycznymi korzystając z zależności podanych w Dodatku A i danych materiałowych podanych w tabelach 1 i 2.
- 2.4. Wyznaczyć figury Chladniego na drgających płytach o różnych kształtach.
- 2.5. Obserwacja fal rozchodzących się na powierzchni wody.

#### 3. Zagadnienia do przygotowania

- 3.1. Drgania strun, prętów, belek i płyt.
- 3.2. Częstotliwości drgań własnych (modów).

#### Literatura

- [1] Dobrucki A., Podstawy akustyki. Skrypt PWr., Wrocław 1987.
- [2] Januszajtis A., Fizyka dla Politechnik, Tom III Fale, §5. PWN W-wa 1991.
- [3] Żyszkowski Z., Podstawy elektroakustyki, wyd.3. WNT W-wa 1984, rozdz. 6.

Tabela 1. Dane materiałowe

Materiał	Współczynnik sprężystości podłużnej (moduł Younga) $E$ [N/m <sup>2</sup> ]	Gęstość $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Prędkość fali podłużnej (dźwięku) $c_L = \sqrt{E / \rho}$ [m/s]
Stal	$2,2 \cdot 10^{11}$	7800	5900
Mosiądz	$1,0 \cdot 10^{11}$	8600	3830
Duraluminium	$0,7 \cdot 10^{11}$	2700	5982
Plexiglas	$4,45 \cdot 10^9$	1180	2670

Tabela 2. Momenty bezwładności przekrojów o różnych kształtach

Kształt przekroju porzecznego	Prostokątny (a x b)	Kołowy (r)	Trójkąt równoboczny (a)
Moment bezwładności przekroju [m <sup>4</sup> ]	$a^3b/12$	$\pi r^4/4$	$\frac{\sqrt{3}}{96} a^4$

Tabela 3. Wyniki pomiarów i obliczeń.

Materiał	Parametry geometryczne	$n$	$f_{n, zm.}$ (Hz)	$f_{n, obl.}$ (Hz)	$\delta_f$ (%)	$m$	$x_{nm, zm.}$ (mm)	$x_{nm, obl.}$ (mm)	$\delta_x$ (%)		
	$l =$ $a =$ $b =$ $r =$ $S =$ $I =$	1									
		2				1					
		3				1					
						2					
			$l =$ $a =$ $b =$ $r =$ $S =$ $I =$	1							
				2				1			
3						1					
						2					
	$l =$ $a =$ $b =$ $r =$ $S =$ $I =$			1							
				2				1			
		3				1					
						2					

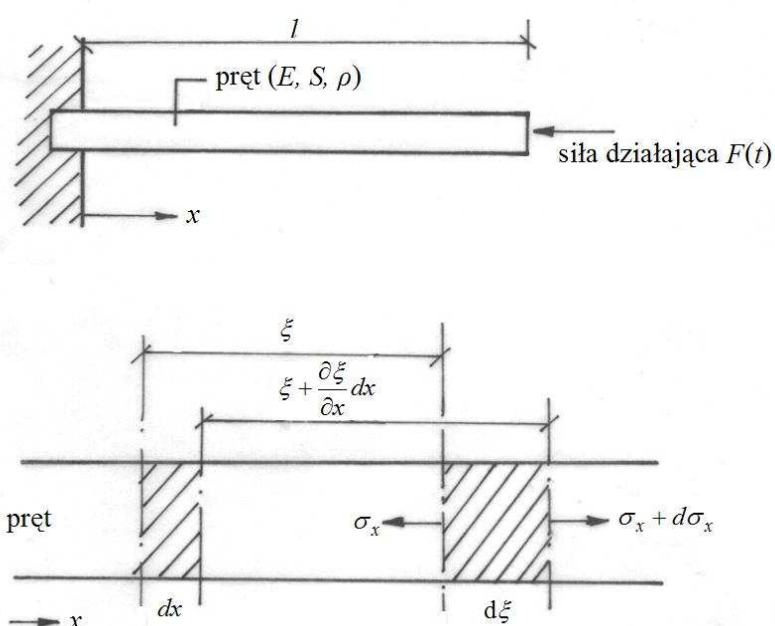
Uwaga:  $\delta_f = (f_{n, zm.} - f_{n, obl.}) / f_{n, obl.} \times 100 \%$ ;  $\delta_x = (x_{n, zm.} - x_{n, obl.}) / x_{n, obl.} \times 100 \%$ ;  
 $l$  – długość [m];  $a$  – grubość [m];  $b$  – szerokość [m];  $r$  – promień [m];  $S$  – pole powierzchni przekroju [m<sup>2</sup>];  $I$  – moment bezwładności przekroju [m<sup>4</sup>];  $n$  – numer modu drgań;  $m$  – numer węzła drgań.

## Dodatek A

### DRGANIA PRĘTÓW

- Rozważamy pręt o jednostajnym przekroju poprzecznym  $S$  [m<sup>2</sup>], wykonany z materiału o gęstości  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] i współczynnika sprężystości podłużnej materiału (moduł Younga)  $E$  [N/m<sup>2</sup>].
- W przeciwieństwie do strun nie uwzględnia się zupełnie naciągu. Przyjmuje się, że całkowita siła zwracająca pręt do położenia równowagi pochodzi jedynie od jego sprężystości własnej.
- Pręt może drgać podłużnie, poprzecznie i skrętnie (wirowo).

#### I. DRGANIA PODŁUŻNE PRĘTÓW



Rys. 2. Drgania podłużne pręta.

Pod wpływem działającej siły  $F$  [N] odległość  $\xi$  odległość między dwoma dowolnymi przekrojami wzrosła o  $d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ , zatem względne wydłużenie pręta w tym obszarze wynosi

$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$  i zgodnie z prawem Hooke'a jest proporcjonalna do naprężenia  $\sigma_x$ :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}, \quad \rightarrow F = \varepsilon ES.$$

Siła działająca na prawy przekrój jest

$$F + \frac{\partial F}{\partial x} dx = F + ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx,$$

czyli, że wypadkowa siła działająca na odcinek pręta  $d\xi$  wynosi:

$$dF = ES \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} dx.$$

Jest to siła sprężystości. Pod wpływem tej siły masa odcinka pręta  $dx$  równa  $dm = S\rho dx$ , doznaje przyspieszenia  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ . Zatem na podstawie II prawa Newton'a otrzymujemy równanie:

$$(I.1) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

w którym  $c_L = \sqrt{E/\rho}$  [m/s] jest prędkością fali podłużnej (dźwięku) w pręcie.

Jest to równanie falowe, jednowymiarowe (fali dźwiękowej w pręcie). Spełnia je dowolna funkcja typu  $\xi(x \pm ct)$ .

Dla wyznaczenia drgań własnych pręta postępuje się podobnie jak dla struny, tj. metodą rozdzielania zmiennych. Poszukuje się rozwiązania równania (I.1) w postaci iloczynu dwóch funkcji, z których jedna zależy tylko od  $x$ , a druga tylko od  $t$

$$\xi(x, t) = X(x)T(t).$$

Ostatecznie, rozwiązanie równania falowego ma postać:

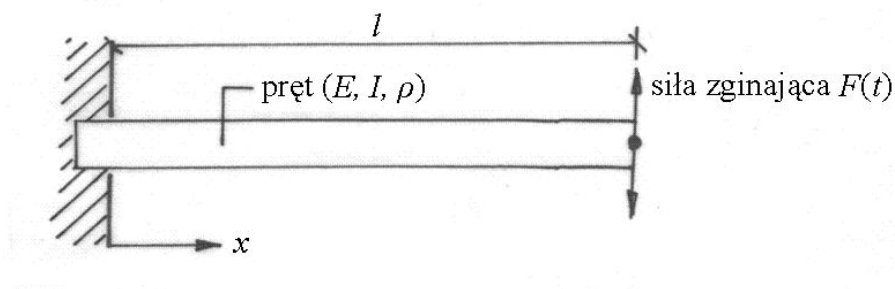
$$(I.2) \quad \xi(x, t) = \sum_n (C_{1n} \cos \omega_n t + C_{2n} \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

gdzie stałe  $C_{1n}$ ,  $C_{2n}$  wyznacza się z warunków początkowych, natomiast częstotści drgań własnych (modów) są równe:

$$(I.3) \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad [\text{rad/s}].$$

Należy zauważyć, że częstotści podłużnych drgań własnych pręta są, podobnie jak struny, harmoniczne w stosunku do częstotści podstawowej  $\omega_1$  ( $n = 1$ ).

## II. DRGANIA POPRZECZNE PRĘTÓW



Rys. 2. Drgania poprzeczne pręta.

Drgania poprzeczne pręta o stałym przekroju  $S$  i gęstości  $\rho$  wzdłuż długości  $l$  opisuje równanie różniczkowe:

$$(II.1) \quad \rho S \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = 0,$$

gdzie wyrażenie w nawiasie jest momentem zginającym, natomiast  $I$  jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego pręta

$$I = \int_S z^2 dS.$$

Równanie (II.1) nie jest równaniem falowym. Jeżeli podstawimy do (II.1) rozwiązanie falowe np. w postaci  $z(x, t) = Z \exp(j(\omega t - kx))$ , to otrzymamy związek dyspersyjny (dyspersja - zjawisko w którym prędkość fali zależy od częstotliwości):

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}},$$

przy czym  $k = 2\pi/\lambda$  jest liczbą falową,  $\lambda$  długością fali poprzecznej. Z zależności tej wynika, że prędkość przemieszczania się powierzchni stałej fazy, czyli prędkość fazowa drgań poprzecznych, jest równa:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\omega c_L} \sqrt{\frac{I}{S}} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \infty.$$

Ze względów fizycznych jest to niemożliwe, zatem równanie (II.1) nie jest ściśle. Jednak dla małych częstotliwości, dla których długość fali poprzecznej  $\lambda$  jest znacznie większa od wymiarów liniowych przekroju poprzecznego pręta ( $a/\lambda < 0.1$ ), równanie (II.1) jest wystarczająco dokładne dla zastosowań technicznych.

Podstawiając do równania (II.1):  $z(x, t) = Z(x) \exp(j\omega t)$ , otrzymamy:

$$(II.2) \quad \frac{d^4 Z(x)}{dx^4} - \mu^4 Z(x) = 0, \quad \mu^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{EI}.$$

Ogólne rozwiązanie równania (II.2) można przedstawić w postaci:

$$(II.3) \quad \begin{aligned} Z(x) &= A_1 e^{\mu x} + A_2 e^{-\mu x} + A_3 e^{j\mu x} + A_4 e^{-j\mu x} = \\ &= B_1 \cosh \mu x + B_2 \sinh \mu x + B_3 \cos \mu x + B_4 \sin \mu x \end{aligned}$$

Rozwiązanie (II.3) zawiera cztery stałe do wyznaczenia których potrzebne są cztery warunki brzegowe, po dwa na każdy koniec pręta.

### II.1. Pręt zaciśnięty na jednym końcu i swobodny na drugim

Dla  $x = 0$  wychylenie i nachylenie pręta muszą być równe zero:

$$Z(0) = 0 \quad \text{i} \quad \left. \frac{dZ(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0.$$

Stąd  $B_1 = -B_3$  oraz  $B_2 = -B_4$ .

Dla  $x = l$  moment zginający i siła ścinająca na swobodnym końcu pręta muszą być równe zero:

$$\left. \frac{d^2 Z(x)}{dx^2} \right|_{x=l} = 0 \quad \text{i} \quad \left. \frac{d^3 Z(x)}{dx^3} \right|_{x=l} = 0.$$

Stąd

$$B_2 = B_1 \frac{\sin \mu l - \sinh \mu l}{\cos \mu l + \cosh \mu l} = -B_1 \frac{\cos \mu l + \cosh \mu l}{\sin \mu l + \sinh \mu l},$$

przy czym

$$\begin{aligned} (\cos \mu l + \cosh \mu l)^2 &= \sinh^2 \mu l - \sin^2 \mu l, \\ \cosh \mu l \cos \mu l &= -1. \end{aligned}$$

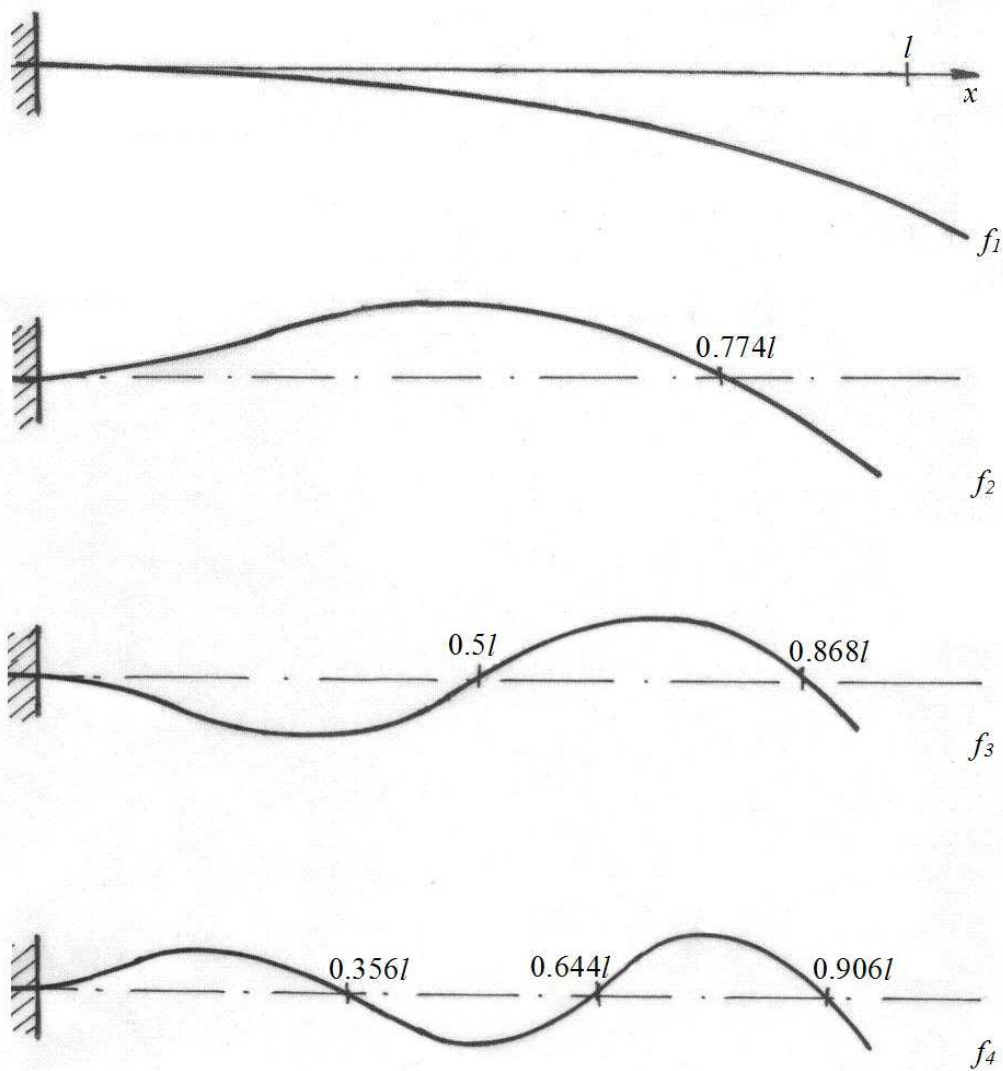
Wartości własne ostatniego równania wynoszą:

$$\begin{cases} \mu_1 l = 1.8751, \\ \mu_2 l = 4.6946, \\ \mu_3 l = 7.8548, \\ \mu_4 l = 10.9957, \dots \end{cases}$$

Dla tych wartości  $\mu_n, n=1, 2, \dots$ , otrzymuje się ze wzoru (II.2) częstotliwości poprzecznych drgań własnych pręta:

$$(II.4) \quad \omega_n^2 = \mu_n^4 \frac{EI}{\rho S}.$$

Na rysunku 3 pokazano cztery pierwsze mody drgań poprzecznych pręta zaciśniętego na jednym końcu.



Rys. 3. Cztery pierwsze sposoby (mody) drgań poprzecznych pręta zaciśniętego na jednym końcu o częstotliwościach:

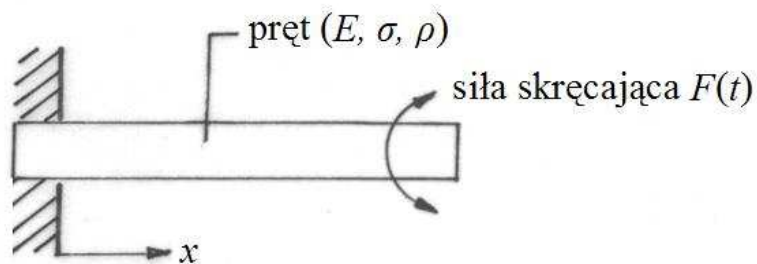
$$f_1 = \frac{0.5596}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, [\text{Hz}]$$

$$f_2 = 6.268 f_1,$$

$$f_3 = 17.548 f_1,$$

$$f_4 = 34.387 f_1.$$

### III. DRGANIA SKRĘTNE PRĘTÓW



Rys. 4. Drgania skrętne pręta.

Gdy pręt jest pobudzany momentem skręcającym powstają drgania skrętne (wirowe). Pręt przenoszący momenty skręcające nazywany jest wałem.

Częstotliwość podstawowa drgań własnych skrętnych jest określona wzorem:

$$(III.1) \quad f_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}, \text{ [Hz]},$$

gdzie  $\sigma$  jest liczbą Poissona.

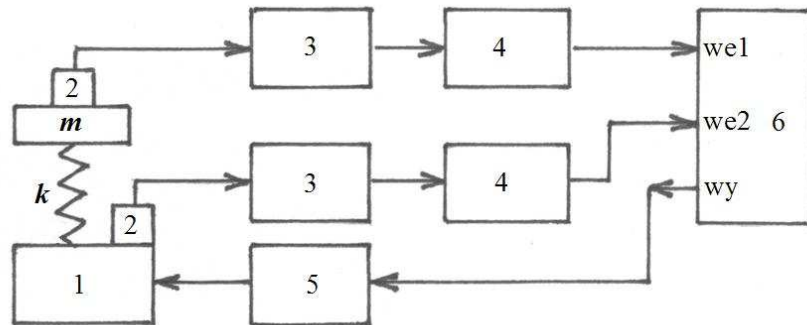
Częstotliwości drgań wyższych modów są harmoniczne w stosunku do częstotliwości podstawowej  $f_1$ .

## II. Pomiary drgań układu o 1 stopniu swobody

### Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z właściwościami układów drgających oraz metodami pomiaru i analizy drgań.

#### 1. Układ pomiarowy



1 - wzбудnica drgań typ 11076 RFT, 2 - czujniki drgań typ KD 31 RFT, 3 - układy całkujące typ SM 10 RFT, 4 - wzmacniacze napięciowe 2607 B&K, 5 - wzmacniacz mocy typ 2706 B&K, 6 – komputer PC + program WINPOMI.

#### 2. Zadania laboratoryjne

2.1. Połączyć układ wg schematu blokowego.

2.2. Uruchomić program do pomiarów elektroakustycznych WinPomi.

2.3. W programie WinPomi dokonać następujących nastaw:

- Typ okienka: Prostokątne
- Długość FFT: 8192
- Sygnał pomiarowy: Chirp
- Liczba uśrednień: 3
- Ilość cykli bez pomiaru: 1
- Napięcie wyjściowe: 0.2V
- Częstotliwość próbkowania: 4 kHz
- Tryb pracy: dwa kanały
- Zaznaczyć okienko autoskalowanie.

Zakres napięć wejściowych karty pomiarowej wynosi  $\pm 10$  V. Należy wyregulować poziom sygnału podawanego na wzbudnicę drgań (regulator wzmocnienia wzmacniacza mocy), jak też wzmocnienia przedwzmacniaczy czujników drgań i wzmacniaczy pomiarowych. Sprawdzenie napięć sygnałów podawanych na kartę można dokonać w programie WinPomi wybierając:

- Pomiar → Analiza sygnału
- Analizy → Przebieg czasowy

i uruchamiając Pomiar.

2.4. Dla zadanej masy obciążającej sprężynę ( $m_1$ ) zmierzyć charakterystykę częstotliwościową przyspieszenia drgań układu o 1 stopniu swobody.

W tym celu należy w programie WinPomi wybrać:

- Pomiar → Transmitancja

- Analizy → Moduł transmitancji
- Tryb pracy: stosunek A/B

i uruchomić Pomiar.

Otrzymany wykres modułu transmitancji zdokumentować po wstępnym dobraniu zakresów zmian poziomu i częstotliwości.

Przy pomocy kursora odczytać bardzo dokładnie częstotliwość drgań swobodnych jednowymiarowego oscylatora harmonicznego. W tym celu należy ograniczyć wykres do zakresu częstotliwości bliskich częstotliwości rezonansowej, jak też zmienić skalę częstotliwości na liniową.

Odczytać również wartości częstotliwości dla spadku poziomu sygnału względem poziomu w rezonansie o 3 dB.

Odczytać wartość przesunięcia fazowego funkcji transmitancji dla częstotliwości rezonansowej. W tym celu należy w programie WinPomi wybrać: Analizy → Faza transmitancji

- 2.5. Zmieniając masę obciążającą sprężynę ( $m_2$ ) powtórzyć pomiary opisane w punkcie 2.4.
- 2.6. Znając masy  $m_1$  i  $m_2$  i odpowiadające im częstotliwości rezonansowe  $f_1$  i  $f_2$ , wyznaczyć masę i podatność sprężyny w układzie drgającym o 1 stopniu swobody korzystając z zależności podanej w Dodatku B.
- 2.7. Określić dobroć układu o różnych masach.

### 3. Zagadnienia do przygotowania

- 3.1. Kinematyczne wymuszenie drgań układu o 1 stopniu swobody
- 3.2. Drgania własne i wymuszone układu z tłumieniem

### Literatura

- [1] Dobrucki A., Podstawy akustyki. Skrypt PWr., Wrocław 1987
- [2] Januszajtis A., Fizyka dla Politechnik, Tom III Fale, §5. PWN Warszawa 1991.
- [3] Kucharski T., Drgania mechaniczne. Rozdz. 4,6. WNT Warszawa 2004.

Tabela 1. Wyniki pomiarów.

Parametr	$m_1$ (g)	$f_1$ (Hz)	$\Delta f_1$ (-3 dB) (Hz)	$\varphi_1$ (rad)	$m_2$ (g)	$f_2$ (Hz)	$\Delta f_2$ (-3 dB) (Hz)	$\varphi_2$ (rad)
Wartość zmierzona								

Tabela 2. Wyniki obliczeń.

Parametr	$m_s$ (g)	$k$ (N/m)	$Q_1$	$Q_2$
Wartość obliczona				

## Dodatek B

### 1. WPROWADZENIE

Ciała lub układy wykonujące drgania noszą nazwę oscylatorów. W ogólnym przypadku oscylatory nie muszą się poruszać, wystarczy, że wielkości charakteryzujące ich stan zmieniają się okresowo. Jeżeli przebieg zmienności jakiejś wielkości można opisać funkcją  $\sin$  lub  $\cos$ , to drgania nazywa się harmonicznymi.

Rozróżnia się oscylatory nie tylko ze względu na rodzaj drgającej wielkości, ale przede wszystkim ze względu na zakres częstotliwości:

- mechaniczne, drgające z częstotliwością akustyczną do ok.  $10^5$  Hz,
- elektryczne, z częstotliwością radiową:  $10^3$ - $10^{12}$  Hz,
- atomowe, z częstotliwością optyczną  $10^{11}$ - $10^{17}$  Hz,
- jądrowe, z częstotliwością do  $10^{22}$  Hz i więcej.

Aby układ mógł wykonywać drgania, muszą być spełnione następujące warunki:

- 1. Istnieje położenie równowagi i przywracająca je siła zwrotna.**
- 2. Układ ma bezwładność.**
- 3. Opory ruchu nie są zbyt duże.**

#### *Ad. 1. Położenie równowagi i siła zwrotna.*

W ogólnym przypadku energia potencjalna oscylatora zależy od wielkości  $q$ ,  $E_p = E_p(q)$ . Położenia (lub stany) równowagi odpowiadają minimum energii potencjalnej. Wychyleniu, czyli odejściu od stanu równowagi towarzyszy pojawienie się siły przywracającej równowagę.

W oscylatorze mechanicznym wielkość  $q$  oznacza wychylenie, a siłą przywracającą równowagę jest siła zwrotna, przeciwnie skierowana do wychylenia, której wartość rośnie wraz z wychyleniem:

$$(1.1) \quad F(q) = -\text{grad } E_p(q) = -\nabla E_p,$$

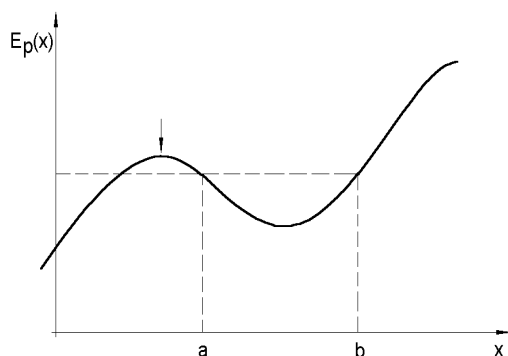
lub w przypadku jednowymiarowym:  $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$ . Wychylenie  $x$  mierzy się od położenia równowagi.

Gdy zachodzi (1.1), to pole sił  $F$  jest polem zachowawczym, w którym suma energii kinetycznej i potencjalnej jest wielkością stałą (zasada zachowania energii). W dalszych rozważaniach będziemy mieli do czynienia z siłami zachowawczymi i będziemy pomijać siły oporu, które są siłami niezachowawczymi.

W jednym wymiarze wszystkie siły, zależne jedynie od  $x$  (siły tarcia pomijamy), są automatycznie zachowawcze, ponieważ istnieje tylko jedna jednoznaczna droga między dwoma punktami, a mianowicie linia prosta.

Krzywa zależności energii potencjalnej od położenia może mieć różny przebieg. Jeżeli przebieg  $E_p(x)$  jest taki, jak na rys.1.1, to ruch odpowiadający energii  $E_p$  będzie zawsze ruchem periodycznym, niekoniecznie jednak harmonicznym.

Krzywa zależności energii potencjalnej od położenia może być pewną skomplikowaną funkcją, trudną do opisu analitycznego. Jednym z najczęściej stosowanych przybliżeń w fizyce teoretycznej jest przybliżenie harmoniczne. W ramach tego przybliżenia funkcję  $E_p(x)$  rozwijamy w szereg potęgowy Taylora:



Rys.1.1. Ruch okresowy między punktami a i b dla wartości energii potencjalnej  $E_p$  poniżej lokalnego maksimum energii.

$$E_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n E_p}{dx^n} \right|_{x=x_0} \cdot (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n,$$

w którym  $x$  oznacza położenie,  $x_0$  jest położenie równowagi w którym  $E_p = \min.$ , a  $\xi = x - x_0$  jest wychylenie z położenia równowagi.

Uwzględniając, że w położeniu równowagi  $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$ , oraz że dla małych wychyleń wolno pominąć dalsze wyrazy (dla  $n \geq 3$ ) szereg Taylora można zapisać w postaci (przybliżenie harmoniczne):

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot \xi^2.$$

Stąd i z (1.1) siła zwrotna jest równa:

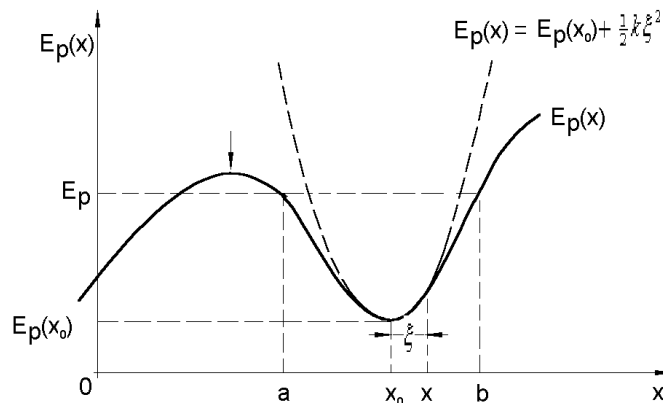
$$(1.2) \quad F = -\frac{dE_p}{d\xi} = -\left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot \xi = -k\xi,$$

przy czym stałą  $k$  (współczynnik sprężystości lub sztywności) znajduje się doświadczalnie jako stosunek siły do wychylenia (prawo Hooke'a):  $k = \frac{F}{|\xi|}$ , [N/m].

Zależność (1.2) oznacza, że przy małym wychyleniu z położenia równowagi, siła zwrotna jest wprost proporcjonalna do wartości wychylenia. Siły takie nazywa się quasi-sprężyste. Energia potencjalna w przybliżeniu harmonicznym ma zatem postać:

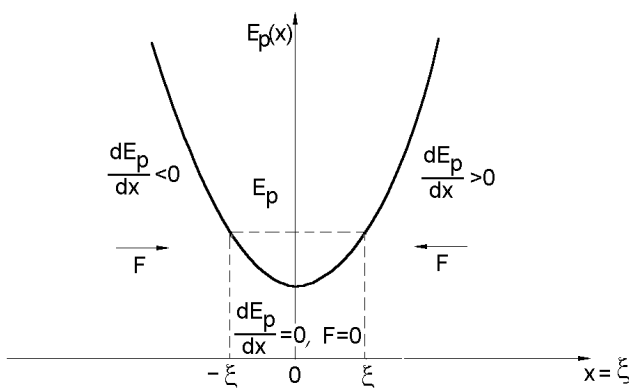
$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2} k \xi^2.$$

Przy małych wychyleniach  $\xi$  ruch jest harmoniczny (siły quasi-sprężyste). Dla energii  $E_p$  poniżej lokalnego maksimum ruch między punktami a i b jest zawsze okresowy, ale nie musi być harmoniczny.



Rys.1.2. Aproksymacja krzywej energii potencjalnej parabolą.

Początek układu współrzędnych można przyjąć w położeniu równowagi ( $x_0 = 0, x = \xi$ ).



Rys.1.3. Zwrot siły  $F$  wynika ze znaku pochodnej energii potencjalnej.

Wówczas wzór na energię potencjalną w przybliżeniu harmonicznym można zapisać w postaci:

$$(1.3) \quad E_p(x) = E_p(0) + \frac{1}{2} kx^2,$$

oraz

$$F = -kx.$$

W przypadku trójwymiarowym wychylenie  $x$  zastępujemy wektorem  $r$

$$F = -gradE_p = -kr.$$

### Ad.2. Bezwładność

Gdyby nie było bezwładności, siła zwrotna przywróciłaby stan równowagi i ruch na tym by się zakończył. Bezwładność powoduje, że po przejściu położenia równowagi następuje wychylenie w przeciwną stronę. Powstaje przy tym siła zwrotna skierowana w stronę położenia równowagi, która ją przywraca (por. rys. 1.2), ale bezwładność znowu nie pozwala na zatrzymanie w tym miejscu, itp. Miarą bezwładności w oscylatorach mechanicznych jest masa  $m$  ciała drgającego, która jest wielkością fizyczną niezależną od prędkości.

### Ad.3. Opory ruchu

W każdym ruchu mamy do czynienia z oporami ruchu, czyli siłami przeciwnie skierowanymi do prędkości, których praca jest zawsze ujemna. Należą do nich tarcie i lepkość. Są to siły niezachowawcze, które nieodwracalnie zmniejszają energię układu. Ich główny efekt działania polega na zmniejszeniu amplitudy, która z czasem znika.

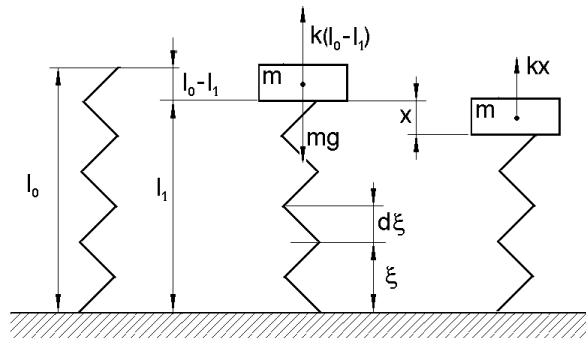
Jeżeli opory są zbyt duże, czas zaniku jest mniejszy, niż okres drgań i w ogóle nie dochodzi do drgań. Bardziej dokładna analiza zostanie podana przy omawianiu drgań tłumionych.

## 2. RUCH SWOBODNY JEDNOWYMIAROWEGO OSCYLATORA HARMONICZNEGO

Pojęcie oscylatora harmonicznego pojawia się we wszystkich działach fizyki teoretycznej i zagadnieniach technicznych, np. oscylujący prąd elektryczny w cewce (energia kinetyczna) i kondensatorze (energia potencjalna); opór elektryczny (prawo Ohma) odgrywa w tym przypadku rolę tarcia.

### 2.1. RUCH SWOBODNY OSCYLATORA BEZ TARCIA

Drgania swobodne układu są to drgania podczas których ich energia nie jest ani rozpraszana ani nie rośnie. Jako przykład drgań swobodnych rozważmy ciężarek o  $m$  drgający na sprężynie o masie  $m_s$ . Długość swobodna sprężyny (nieobciążonej) jest  $l_0$ , a obciążonej  $l_1$  (por. rys. 2.1).



Rys. 2.1. Ciężarek na ważkiej sprężynie.

Wychylenie o  $x$  z położenia równowagi wytwarza siłę zwrotną  $kx$  przeciwnie skierowaną do wychylenia. Przy niezbyt dużym obciążeniu  $mg$  skrócenie sprężyny jest do niego proporcjonalne (prawo Hooke'a):

$$mg = k(l_0 - l_1),$$

gdzie  $k$  jest sztywnością sprężyny [N/m],  $g$  – przyspieszenie grawitacyjne.

Obciążona sprężyna pozostaje w równowadze. Przy wychyleniu o  $x$  z położenia równowagi skrócenie sprężyny wynosi  $l_0 - l_1 + x$ , a związana z nim siła sprężystości jest równa  $k(l_0 - l_1 + x)$  z czego  $k(l_0 - l_1)$  równoważy ciężar  $mg$ .

Różnica sił:

$$F = mg - k(l_0 - l_1 + x) = -kx,$$

jest wprost proporcjonalna i przeciwnie skierowana do wychylenia i działa jako siła zwrotna.

Element długości sprężyny  $d\xi$  odległy o  $\xi$  od zamocowanego końca ma masę:

$$dm_s = \frac{d\xi}{l_1} m_s.$$

Przemieszczenie elementu sprężyny  $d\xi$  jest wprost proporcjonalne do jego odległości  $\xi$  od punktu zamocowania. W punkcie zamocowania sprężyny ( $\xi = 0$ ), przemieszczenie elementu sprężyny  $d\xi$  jest równe zeru. Przy wzroście  $\xi$  przemieszczenie rośnie, a na końcu sprężyny  $\xi = l_1$  jest równe wychyleniu  $x$  ciężarka z położenia równowagi,  $d\xi = x$ . Zatem w odległości  $\xi$  przemieszczenie elementu sprężyny  $d\xi$  jest równe  $d\xi = \frac{\xi}{l_1} x$ . Pochodna przemieszczenia po

czasie oznacza jego prędkość  $\frac{\xi}{l_1} \dot{x}$ , a energia kinetyczna elementu sprężyny wynosi:

$$dE_{ks} = \frac{1}{2} dm_s \left( \frac{\xi}{l_1} \dot{x} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_s \dot{x}^2}{l_1^3} \xi^2 d\xi,$$

stąd energia kinetyczna całej sprężyny jest równa:

$$E_{ks} = \int_0^{l_1} dE_{ks} = \frac{1}{2} \frac{m_s \dot{x}^2}{l_1^3} \int_0^{l_1} \xi^2 d\xi = \frac{1}{6} m_s \dot{x}^2.$$

Dodając energię kinetyczną ciężarka  $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$  otrzymamy:

$$(2.1) \quad E_k = \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{3} m_s \right) \dot{x}^2.$$

Zatem efektywna masa sprężyny, która bierze udział w ruchu drgającym układu wynosi  $\frac{1}{3} m_s$ .

Z wychyleniem  $x$  (nie za dużym) masy  $m$  jest związana energia potencjalna:

$$(2.2) \quad E_p = \frac{1}{2} kx^2.$$

Z równania ruchu Eulera-Lagrange'a:

$$(2.3) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0,$$

oraz na podstawie (2.1) i (2.2) otrzymujemy następujące równanie ruchu dla oscylatora bez tarcia (nie tłumionego):

$$(2.4) \quad \left( m + \frac{1}{3} m_s \right) \ddot{x} + kx = 0.$$

Równanie to jest przykładem liniowego równania różniczkowego zwyczajnego, drugiego rzędu, o stałych współczynnikach. Jest ono liniowe, bo nie zawiera  $x$  w potęgze wyższej niż

pierwsza oraz współczynniki  $m + \frac{1}{3}m_s$  i  $k$  nie zależą od czasu  $t$ . Równania tego typu mają rozwiązania ogólne w postaci zespolonych funkcji trygonometrycznych:  $e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$ . Sens fizyczny ma część rzeczywista tych rozwiązań. Zgodnie z tym poszukujemy rozwiązania w postaci zespolonej, metodą podstawienia:

$$\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}, \quad \underline{X} = |\underline{X}|e^{j\phi}, \quad \ddot{\underline{x}}(t) = -\omega^2 \underline{X}e^{j\omega t}.$$

Po podstawieniu do (2.4) otrzymujemy:

$$\left[ -\omega^2 \left( m + \frac{1}{3}m_s \right) + k \right] \underline{X}e^{j\omega t} = 0.$$

Równość musi zachodzić dla każdej wartości  $t$ , zatem

$$-\omega^2 \left( m + \frac{1}{3}m_s \right) + k = 0.$$

Stąd pulsacja drgań swobodnych oscylatora bez tarcia  $\omega_0$  jest równa:

$$(2.5) \quad \underline{\omega_0^2} = \frac{k}{m + \frac{1}{3}m_s}.$$

Ruch masy  $m$  jest więc ruchem harmonicznym:

$$(2.6) \quad x(t) = \text{Re} \{ \underline{X}e^{j\omega t} \} = |\underline{X}| \cos(\omega_0 t + \phi),$$

przy czym amplitudę  $|\underline{X}|$  i fazę  $\phi$  drgań wyznaczamy z warunków początkowych.

## 2.2. RUCH SWOBODNY OSCYLATORA Z TARCIEM

W fizyce teoretycznej przyjmuje się zwykle (niekoniecznie zgodnie z rzeczywistością), że siły tarcia są proporcjonalne do prędkości. Zakładamy więc, że siła tarcia w oscylatorze ma postać  $-r \frac{dx}{dt}$ , gdzie stałą  $r$  [kg/s] nazywamy rezystancją mechaniczną oscylatora.

Aby móc korzystać z równań Eulera-Lagrange'a wprowadza się funkcję opisującą rozpraszanie energii w czasie, tzw. funkcję dyssypacji, która jest mocą traconą w układzie oscylatora na skutek działania siły tarcia lepkiego, proporcjonalną do prędkości:

$$P = r\dot{x}^2 = R\dot{x},$$

gdzie  $R = r\dot{x}$  jest siłą tarcia.

Funkcja dyssypacji jest miarą szybkości zmian energii w układzie oscylatora

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = -P,$$

która jest zawsze ujemna, co interpretuje się jako ubywanie energii z układu.

Równanie ruchu Eulera-Lagrange'a oscylatora tłumionego o jednym stopniu swobody jest zatem następujące:

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial \dot{x}},$$

przy czym energia kinetyczna  $E_k$ , energia potencjalna  $E_p$  i moc tracona w układzie oscylatora  $P$  są równe:

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad E_p = \frac{1}{2} k x^2, \quad P = r \dot{x}^2.$$

Po podstawieniu otrzymamy, tak jak poprzednio, liniowe równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu, o stałych współczynnikach:

$$\ddot{x} + \frac{2r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Podstawiając  $\frac{k}{m} = \omega_o^2$ , gdzie  $\omega_o$  jest pulsacją drgań swobodnych oscylatora bez tarcia, oraz

$\alpha = \frac{r}{m}$ , gdzie  $\alpha$  jest dekrementem tłumienia, otrzymuje się równanie ruchu oscylatora o jednym stopniu swobody w postaci:

$$(2.8) \quad \ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_o^2 x = 0.$$

Rozwiązania tego równania poszukujemy również w postaci zespolonej, metodą podstawienia:

$$\underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t} = |\underline{X}| e^{j(\omega t + \theta)},$$

przy czym

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = j\omega \underline{X} e^{j\omega t}, \\ \ddot{\underline{x}}(t) = -\omega^2 \underline{X} e^{j\omega t}. \end{cases}$$

Po podstawieniu do równania ruchu (2.8) otrzymamy:

$$(-\omega^2 + j\omega 2\alpha + \omega_o^2) \underline{X} e^{j\omega t} = 0.$$

Równanie to musi być spełnione dla każdego  $t$ , zatem musi zachodzić równość:

$$(2.9) \quad \underline{-\omega^2 + j\omega 2\alpha + \omega_o^2} = 0.$$

Jest to równanie charakterystyczne, kwadratowe, którego pierwiastkami są:

$$(2.10) \quad \omega_{1,2} = j\alpha \pm \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}.$$

Oznaczając pulsację drgań swobodnych tłumionych układu przez  $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}$ , należy rozważyć trzy przypadki w zależności od  $\alpha$ .

### 2.2.1. Ruch swobodny periodyczny

Jeżeli  $\alpha < \omega_0$ , to pulsacja drgań swobodnych tłumionych układu  $\Omega$  jest rzeczywista. Rozwiązanie równania ruchu w postaci zespolonej:

$$(2.11) \quad \underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t} = |\underline{X}|e^{-\alpha t} \exp[j(\Omega t + \phi)],$$

można interpretować geometrycznie jako fazor o malejącej długości (amplitudzie)

$$A(t) = |\underline{X}|e^{-\alpha t} = A_0e^{-\alpha t},$$

wirujący w płaszczyźnie Gaussa z prędkością kątową  $\Omega$  i nachylony w chwili  $t$  pod kątem  $\Omega t + \phi$  do osi rzeczywistej. Koniec fazora zakreśla spiralę logarytmiczną (patrz rys. 2.2). Rozwiązanie rzeczywiste jest zatem rzutem fazora na jedną z osi:

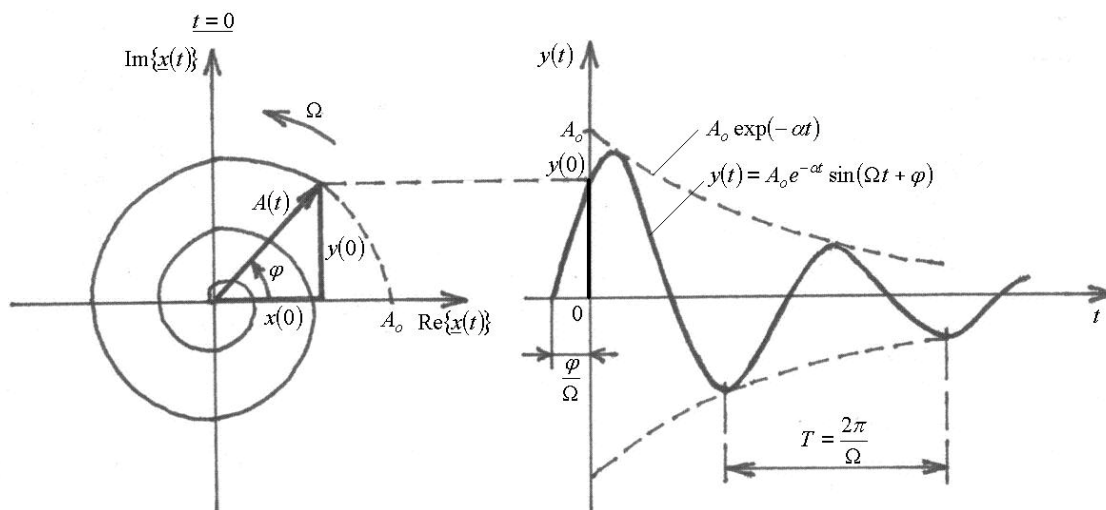
- na oś rzeczywistą

$$(2.11a) \quad x(t) = \text{Re}\{\underline{x}(t)\} = A_0e^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \phi),$$

- lub oś urojona

$$(2.11b) \quad y(t) = \text{Im}\{\underline{x}(t)\} = A_0e^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \phi).$$

Łatwo sprawdzić, że obydwa rozwiązania spełniają równanie ruchu (2.8).



Rys. 2.2. Tłumione oscylacje masy  $m$  oscylatora; przypadek periodyczny, gdy  $\alpha < \omega_0$ .

### Logarytmiczny dekrement tłumienia

Czynnik  $e^{-\alpha t}$  we wzorach (2.11a) i (2.11b) wyraża zanik amplitudy drgań masy oscylatora w czasie. Jego wartość w ciągu okresu  $T = 2\pi/\Omega$  wynosi  $e^{-\alpha T}$ , przy czym

$$(2.12) \quad \delta = \alpha T = 2\pi \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}}$$

jest logarytmicznym dekrementem tłumienia.

Biorąc logarytm naturalny ze stosunku amplitud dla odstępu czasu  $nT$ ,  $n = 1, 2, \dots$  otrzymamy:

$$\ln \frac{A(t)}{A(t+nT)} = \ln \frac{A_o e^{-\alpha t}}{A_o e^{-\alpha(t+nT)}} = n\alpha T = n\delta.$$

Ponieważ dekrement tłumienia jest równy  $\alpha = r/m$ , zatem

$$r = m\alpha = \frac{m}{nT} \ln \frac{A(t)}{A(t+nT)},$$

co pozwala wyznaczyć rezystancję mechaniczną oscylatora, jeżeli znamy masę układu  $m$ , okres  $T$  i zmierzmy stosunek amplitud drgań.

Przy słabym tłumieniu układu, tj. gdy  $\alpha \ll \omega_o$ , częstość drgań tłumionych  $\Omega$  jest taka sama jak drgań swobodnych nietłumionych  $\omega_o$ , zatem

$$\delta \approx 2\pi \frac{\alpha}{\omega_o} = 2\pi \frac{r}{\sqrt{km}}.$$

Tak więc, im większe  $k$  i  $m$  tym mniejsze  $\delta$  i tym szybszy zanik amplitudy drgań.

### **Czas relaksacji**

Czas relaksacji  $\tau$  ma określony sens fizyczny. Jest to czas po którym amplituda drgań tłumionych maleje  $e$  razy, tj. o  $20 \lg e = 8.68$  dB

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_o e^{-\alpha t}}{A_o e^{-\alpha(t+\tau)}} = e^{\alpha\tau} = e.$$

Stąd czas relaksacji amplitudy drgań tłumionych:

$$(2.13) \quad \tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{T}{\delta}.$$

Moc lub energia maleje przy tym tak, jak kwadrat amplitudy:  $\left( \frac{A_o e^{-\alpha t}}{A_o e^{-\alpha(t+\tau)}} \right)^2 = e^{2\alpha\tau} = e$ ,

zatem czas relaksacji energii jest równy:

$$(2.13a) \quad \tau_e = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2} \tau.$$

### **Energia ruchu**

Wychylenie i prędkość masy oscylatora w ruchu periodycznym są wg (2.11a) równe:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\underline{x}(t)\} = A_o e^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \phi) = A(t) \cos(\Omega t + \phi),$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dA(t)}{dt} \cos(\Omega t + \phi) - A(t) \sin(\Omega t + \phi).$$

Energia kinetyczna:

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{dA(t)}{dt} \right)^2 \cos^2(\Omega t + \phi) - 2\Omega A(t) \frac{dA(t)}{dt} \cos(\Omega t + \phi) \sin(\Omega t + \phi) + \left( \Omega A(t) \sin(\Omega t + \phi) \right)^2 \right]$$

Energia potencjalna:

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} m \Omega^2 \left[ A(t) \cos(\Omega t + \phi) \right]^2.$$

Suma tych energii jest całkowitą energią mechaniczną oscylatora:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_k(t) + E_p(t) = \\ &= \frac{1}{2} m \left[ \Omega^2 A^2(t) - \Omega A(t) \frac{dA(t)}{dt} \sin 2(\Omega t + \phi) + \left( \frac{dA(t)}{dt} \right)^2 \cos^2(\Omega t + \phi) \right]. \end{aligned}$$

Uśredniając za czas  $T = 2\pi/\Omega$ , drugi wyraz zawierający  $\sin 2(\Omega t + \phi)$  znika. Jeżeli  $A(t)$  zmienia się wolno, to pochodna  $\frac{d}{dt} A(t)$  jest mała w porównaniu z  $\Omega A(t)$ , zatem trzeci wyraz zawierający  $\left( \frac{d}{dt} A(t) \right)^2$  można pominąć.

Ostatecznie całkowita energia oscylatora jest w przybliżeniu równa:

$$(2.14) \quad \bar{E}(t) \approx \frac{1}{2} m \Omega^2 A^2(t) = \frac{1}{2} m \Omega^2 A_o^2 e^{-2\alpha t}.$$

Jest to energia oscylatora, którą można odzyskać („free energy”) i nie jest energią nieodwołalnie traconą na ciepło.

Szybkość zmian całkowitej energii oscylatora jest mocą traconą w układzie oscylatora na skutek działania siły tarcia lepkiego:

$$\bar{P} = -\frac{d\bar{E}(t)}{dt} \approx \alpha m \Omega^2 A_o^2 e^{-2\alpha t} = 2\alpha \bar{E}(t).$$

Stąd i na podstawie (2.13a), średnia za czas  $T = 2\pi/\Omega$ , energia drgań swobodnych oscylatora tłumionego jest iloczynem średniej mocy traconej w układzie i czasu relaksacji energii:

$$\bar{E} = \bar{P}\tau_e.$$

### 2.2.2. Ruch swobodny oscylatora silnie tłumionego

Jeżeli  $\alpha > \omega_o$ , to równanie charakterystyczne (2.9) ma pierwiastki czysto urojone:

$$(2.15) \quad \omega_{1,2} = j\alpha \pm j\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2},$$

zatem pulsacja drgań swobodnych tłumionych oscylatora nie ma części rzeczywistej  $\Omega$  i ruch masy odbywa się w sposób nad tłumiony, tj. mamy do czynienia z czysto wykładniczym zanikiem ruchu, bowiem rozwiązania szczególne równania ruchu (2.8) mają postać:

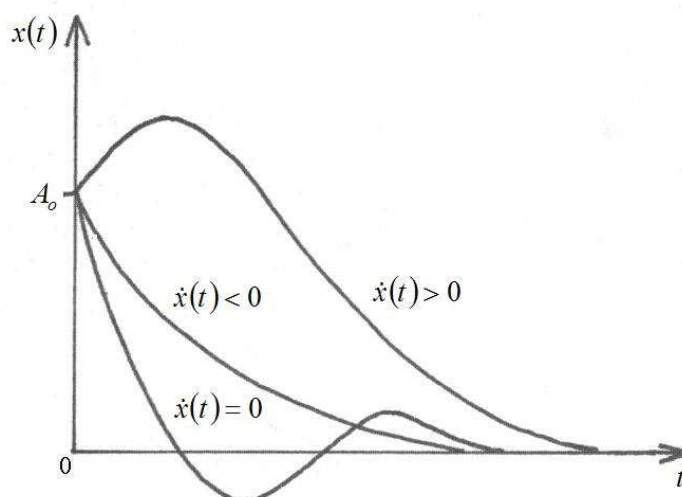
$$\underline{x}_{1,2}(t) = \underline{X}e^{j\omega_{1,2}t} = A_o e^{j\phi} \exp\left[\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}\right)t\right].$$

Zarówno część rzeczywista i urojona spełniają równanie ruchu oscylatora (2.8), zatem zgodnie z zasadą superpozycji rozwiązanie ogólne

$$(2.16) \quad x(t) = e^{-\alpha t} \left[ A_1 \exp\left(\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}t\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}t\right) \right],$$

jest kombinacją wyrazów wykładniczych i ruch masy jest aperiodyczny, przy czym stałe  $A_1$  i  $A_2$  zależą od warunków początkowych.

W szczególnym przypadku może dojść do maksimum wychylenia w jedną stronę i do drgań nie dochodzi. Występuje co najwyżej jedno przejście przez zero. Poszczególne wyrazy w (2.16) zanikają z różną szybkością. Wyraz z wykładnikiem  $-\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$  znika najwolniej, a z wykładnikiem dodatnim rośnie.



Rys. 2.3. Aperiodyczny zanik wychylenia masy oscylatora w ruchu silnie tłumionym.

### 2.2.3. Ruch swobodny oscylatora przy tłumieniu krytycznym

Tak zwany „aperiodyczny przypadek graniczny”, gdy  $\alpha = \omega_0$ , jest dość skomplikowany matematycznie („degeneracja”). Wówczas  $\omega_{1,2} = j\alpha$ ,  $\Omega = 0$  i oprócz rozwiązania

$$x_1(t) = \operatorname{Re}\{\underline{X}e^{j\omega_{1,2}t}\} = A_1e^{-\alpha t},$$

istnieje jeszcze rozwiązanie

$$x_2(t) = A_2te^{-\alpha t}.$$

Zgodnie z zasadą superpozycji rozwiązanie ogólne jest sumą:

$$(2.17) \quad x(t) = (A_1 + A_2t)e^{-\alpha t},$$

gdzie  $A_1, A_2$  znajdujemy z zadanych warunków początkowych.

Porównując (2.16) i (2.17) można zauważyć, że zanik wychylenia masy jest w przypadku tłumienia krytycznego ( $\alpha = \omega_0$ ) szybszy niż w przypadku ruchu silnie tłumionego, gdy  $\alpha > \omega_0$ .

Jest to również ruch aperiodyczny (por. rys. 2.3).